FORMULES D'EULER

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad (1) \qquad\qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) \quad (2)$$

Pourquoi utilise-t-on les formules d'Euler ? Essentiellement pour linéariser et intégrer !...

Démonstrations :

(1) $$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta = \cos\theta + \cos\theta = 2\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$$

(2) $$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta - [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)] = \cos\theta + i\sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta = i\sin\theta + i\sin\theta = 2i\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

Exemples : Linéariser $\cos^2\theta$ et $\sin^2\theta$

$$\begin{aligned}
\cos^2\theta &= \left[\frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\right]^2 = \frac{1}{4}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[\left(e^{i\theta}\right)^2 + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + \left(e^{-i\theta}\right)^2\right] = \frac{1}{4}\left(e^{i2\theta} + 2 + e^{-i2\theta}\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\left(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta} + 2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta} + 2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1) \\
&= \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2} = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta &= \left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\right]^2 = \frac{1}{4\mathrm{i}^2}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left[\left(e^{i\theta}\right)^2 - 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + \left(e^{-i\theta}\right)^2\right] = -\frac{1}{4}\left(e^{i2\theta} - 2 + e^{-i2\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\left(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta} - 2\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta} - 2}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} - 1\right) = -\frac{1}{2}(\cos 2\theta - 1) \\
&= -\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2} = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}
\end{aligned}$$

Exercices :

1/2 Linéariser $\cos^3 x$ et $\sin^3 x$

2/2 On donne la fonction f définie par : $f(x) = \cos 3x \times \sin 4x$

En utilisant les formules d'Euler démontrer que f peut s'écrire : $f(x) = \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin x)$