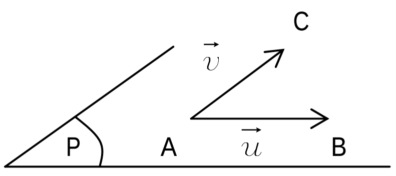
PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

1. Définition

Le calcul du produit scalaire de 2 vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se ramène au calcul du produit scalaire dans le plan



A, B et C sont 3 points tels que :
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

Les expressions suivantes du produit scalaire établies dans le plan sont valables dans l'espace :

- norme et cosinus : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

- pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

- projection orthogonale de C sur (AB) : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB \times AH$

2. Expression analytique

$$\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$$

avec $\vec{u}(\,x\ ;\ y\ ;\ z\,)$ et $\vec{v}(\,x'\ ;\ y'\ ;\ z'\,)$ dans un repère orthonormé

3. Propriétés

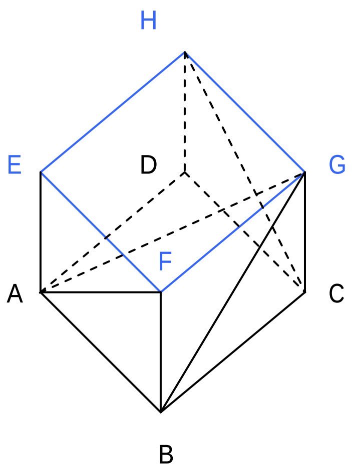
$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ $\qquad$ $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ $\qquad$ $(k.\vec{u})\vec{v} = k.(\vec{u}.\vec{v})$, $k \in \mathbb{R}$

4. Pour quoi faire ?

Hormis le fait que cela ennuie beaucoup d'élèves..., le produit scalaire est un excellent outil qui est utilisé pour démontrer que des droites sont orthogonales et pour calculer des distances et des angles...

5. Exercices

1. ABCDEFGH est un cube d'arête a

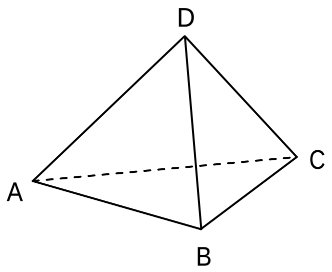


Calculer :

$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}$ $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CH}$

$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{HC}$

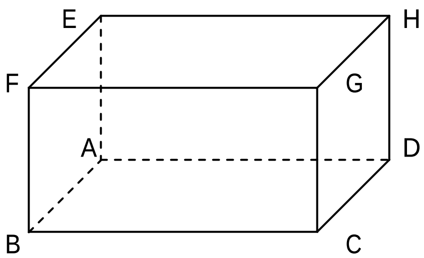
2. ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a. Chaque face est un triangle équilatéral de côté a :



Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ (conclure dans ce cas)

3. Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que : AB = AE = 2 et AD = 3

Soit J le milieu de [EH] et I le centre de la face ABFE



a. Montrer que les droites (BJ) et (AF) sont orthogonales

b. Déterminer l'angle IJG à 0,1° près

4. On considère, dans un repère orthonormal $\left(O ; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, les points :

$A(1 ; 2 ; -2)$ $B(2 ; 3 ; -2)$ $C(0 ; 3 ; -2)$ $D\left(1 ; 2 ; \sqrt{2}-2\right)$

Montrer que AB = AD = AE et que les droites (AB), (AD) et (AE) sont deux à deux orthogonales

5. Soit ABCDS une pyramide de sommet S, à base carrée, dont toutes les arêtes ont même longueur a et O le milieu de [AC]

Calculer : $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$