Exercice 1

(u_n) et (v_n) sont les suites définies, pour tout n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + 6$$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Exprimer v_n en fonction de n

b) Calculer la somme et la limite de : $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ puis de $S'_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

Exercice 2

On considère la suite (v_n) définie sur ℕ par : $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n + 1}$ $\quad u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 4}{u_n + 2}$

a) Montrer que la suite v est géométrique et exprimer v_n puis u_n en fonction de n

b) Calculer la limite de v lorsque n tend vers $+\infty$

Exercice 3

(u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1 \end{cases}$, $\forall n$

1. Calculer u_1, u_2, et u_3

2. On pose : $v_n = 4u_n - 6n + 15$

   a) Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3

   b) Prouver que v_n est une suite géométrique de raison q à déterminer

3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n puis justifier que u_n est la somme d'une suite géométrique et arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

Exercice 4

(u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} \end{cases}$, $\forall n$

a) Vérifier que $u_{n+1} = 3 - \dfrac{10}{u_n + 4}$

b) Montrer que la suite est bornée par 0 et 1.

c) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n + 2)(1 - u_n)}{u_n + 4}$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)

d) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

e) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 1

(u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$, $\forall n$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout n : a) $u_n \geq 0$ b) $u_n < 1$

2. Démontrer que la suite (u_n) est monotone

3. La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

4. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

5. Trouver un entier N tel que, pour tout n > N : $u_n > 0{,}99$

Exercice 2

(u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_1 = \dfrac{2}{7} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - u_n} \end{cases}$, $\forall n \geq 1$ On admettra que $\forall n \geq 1$, $u_n \neq 0$ et $u_n \neq 3$

1. Calculer u_2 et u_3

2. a) La suite (v_n) est définie pour tout $n \geq 1$ par : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ Calculer v_1

   b) Démontrer que pour tout $n \geq 1$: $v_{n+1} = 3v_n - 1$

3. La suite (w_n) est définie par : $w_n = v_n - \dfrac{1}{2}$

   a) Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n et calculer le premier terme w_1

   b) Quelle est la nature de la suite w_n ?

   c) Exprimer w_n en fonction de n

4. a) En déduire l'expression de u_n en fonction de n b) La suite u_n est-elle convergente ?

Exercice 3

(u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\dfrac{2}{u_n + 3} \end{cases}$, $\forall n$

1. Montrer par récurrence que : $-1 < u_n \leq 1$

2. Démontrer que la suite (u_n) est monotone

3. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

4. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 1

(u_n) et (v_n) sont les suites définies, pour tout n, par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + 3$$

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

3. En déduire la limite de la suite (u_n)

4. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

   a) Exprimer S_n en fonction de n

   b) En déduire la limite de S_n

Exercice 2

(u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ 2u_{n+1} = u_n - 1 \end{cases}$, $\forall n$

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite u_n

2. α est un nombre réel. La suite v_n est définie pour tout entier n par : $v_n = u_n - \alpha$

   a) Trouver le nombre α pour que v_n soit une suite géométrique

   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

   c) Étudier le sens de variation et la convergence de la suite u_n

   d) Trouver le pus petit entier n tel que u_n appartienne à l'intervalle $]-1-10^{-4} ; -1+10^{-4}[$

Exercice 3

(u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3} - \frac{2}{3} \end{cases}$, $\forall n$

1. Conjectures

   a) Construire graphiquement les premiers termes de la suite

   b) La suite semble-t-elle majorée (minorée), si oui préciser un majorant (minorant) ? Monotone ? Convergente ?

2. Démonstrations : Démontrer ces conjectures

3. Expression de u_n en fonction de n

   a) Déterminer le réel α tel que la suite v définie par $v_n = u_n - \alpha$ soit géométrique. Déterminer sa raison et son premier terme.

   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

   c) Retrouver les résultats du 2.

1 La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{8u_n + 3}{u_n + 6}$$

1° a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $1 < u_n < 3$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2° On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, préciser son premier terme et sa raison.

b) Quelle est la limite de (v_n) ?

3° Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de v_n
En déduire le comportement à l'infini de u_n

3 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n + 5}$$

1° À l'aide de la touche ANS de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (u_n) (variations et limite).

2° Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$

3° Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
Que peut-on en déduire ?

4° On introduit la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{5}{u_n}$

a) Prouver que la suite (v_n) est arithmétique. En déduire v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n

b) Déterminer le comportement à l'infini de la suite (u_n)

2 On définit la suite (u_n) par $u_0 \in \,]0 \, ; 5]$ et,

pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{5u_n}$

1° À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (u_n) (sens de variation et limite).

2° Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

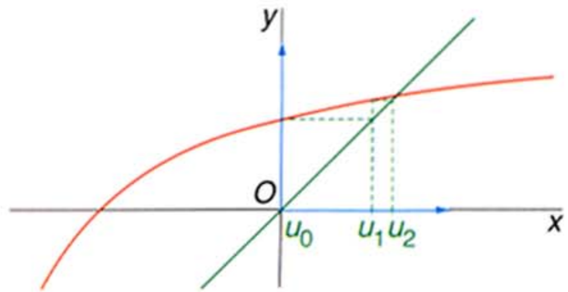
$$0 \leqslant u_n \leqslant 5$$

3° Étudier le sens de variation de (u_n) et en déduire sa convergence. Quelle est sa limite ?

4 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et

pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2}$

1° La figure ci-après représente les premiers termes de cette suite. Que permet-elle de conjecturer ?



2° Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

3° Démontrer que, pour tout entier naturel n, les différences $u_{n+2} - u_{n+1}$ et $u_{n+1} - u_n$ sont de même signe.
En déduire le sens de variation de (u_n), puis sa convergence.

4° Déterminer la limite de la suite (u_n)