LIMITES EN UN RÉEL a

A. FONCTIONS POLYNÔMES

Si f est une fonction polynôme alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exemple : soit f(x) = $x^2 - 2x + 5$ définie sur ℝ $\qquad \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 5 = 4$

B. FONCTIONS RATIONNELLES

On distingue 2 cas :

1^er^ cas : a appartient au domaine de définition

Exemple : soit f(x) = $\dfrac{x+1}{x-2}$ définie sur ℝ \ $\{2\}$ $\qquad \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = \dfrac{3+1}{3-2} = 4$

2^ème^ cas : a n'appartient pas au domaine de définition

• À partir de l'exemple précédent calculons, dans le détail, la $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$: $\qquad \lim\limits_{x \to 2} x + 1 = 3$ et $\lim\limits_{x \to 2} x - 2 = 0$

, le rapport des limites n'est pas réalisable car 2 ∉ Df et la division par zéro est impossible.

Pour résoudre ce type de limite il est nécessaire de distinguer 2 cas, suivant que x tend vers 2 par valeurs supérieures ou inférieures :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x - 2$		$-$	0	$+$	

♦ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} x - 2 = \lim\limits_{x \to 2^-} x - 2 = 0^-$

♦ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} x - 2 = \lim\limits_{x \to 2^+} x - 2 = 0^+$

Par conséquent, il est possible de réaliser le calcul de limite suivant $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$:

♦ $\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 2^-} x + 1 = 3 \\ &\lim_{x \to 2^-} x - 2 = 0^- \end{aligned}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+1}{x-2} = -\infty$

♦ $\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 2^+} x + 1 = 3 \\ &\lim_{x \to 2^+} x - 2 = 0^- \end{aligned}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+1}{x-2} = +\infty$

• Autre exemple : soit g(x) = $\dfrac{x-5}{x^2-9}$ définie sur ℝ \ $\{\ -3\ ;\ 3\ \}$. Calculer $\lim\limits_{x \to -3} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x^2 - 9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

♦ $\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to -3^-} x - 5 = -8 \\ &\lim_{x \to -3^-} x^2 - 9 = 0^+ \end{aligned}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{x-5}{x^2-9} = -\infty$

♦ $\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to -3^+} x - 5 = -8 \\ &\lim_{x \to -3^+} x^2 - 9 = 0^- \end{aligned}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{x-5}{x^2-9} = +\infty$

♦ $\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 3^-} x - 5 = -2 \\ &\lim_{x \to 3^-} x^2 - 9 = 0^- \end{aligned}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{x-5}{x^2-9} = +\infty$

♦ $\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 3^+} x - 5 = -2 \\ &\lim_{x \to 3^+} x^2 - 9 = 0^+ \end{aligned}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x-5}{x^2-9} = -\infty$

Exercices :

Donner l'ensemble de définition de f et calculer la limite de f en a :

	$f(x) =$	
1/10	$x^2 - x + 3$	2
2/10	$\frac{5-3x}{4x+1}$	–1
3/10	$\frac{x^2+2x+1}{2x+2}$	–1
4/10	$\frac{1}{x}$	0
5/10	$\frac{-2}{x-3}$	3
6/10	$\frac{x^2+x+1}{x-1}$	1
7/10	$\frac{x-\frac{1}{2}}{-2x^2+x+3}$	–1 3/2
8/10	$\frac{x-2}{(x+3)^2}$	–3
9/10	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0
10/10	$\frac{1}{2-\sqrt{x}}$	4