

LIMITES EN UN RÉEL a

A. FONCTIONS POLYNÔMES

Si f est une fonction polynôme alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Exemple : soit $f(x) = x^2 - 2x + 5$ définie sur \mathbb{R}

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 5 = 4$$

B. FONCTIONS RATIONNELLES

On distingue 2 cas :

1^{er} cas : a appartient au domaine de définition

Exemple : soit $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

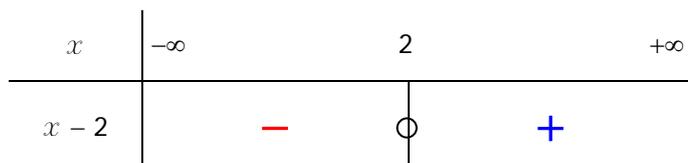
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = \frac{3+1}{3-2} = 4$$

2^{ème} cas : a n'appartient pas au domaine de définition

• À partir de l'exemple précédent calculons, dans le détail, la $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow 2} x+1 = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 2} x-2 = 0$

, le rapport des limites n'est pas réalisable car $2 \notin \text{Df}$ et la division par zéro est impossible.

Pour résoudre ce type de limite il est nécessaire de distinguer 2 cas, suivant que x tend vers 2 par valeurs supérieures ou inférieures :



$$\blacklozenge \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} x - 2 = \lim_{x \rightarrow 2^-} x - 2 = 0^-$$

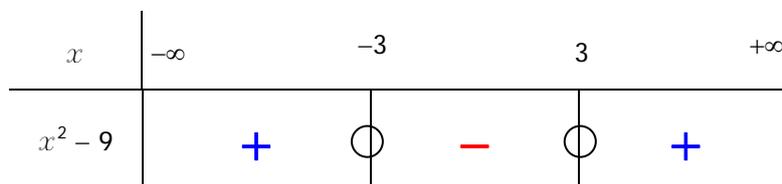
$$\blacklozenge \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x - 2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 2 = 0^+$$

Par conséquent, il est possible de réaliser le calcul de limite suivant $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$:

$$\blacklozenge \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} x+1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} x-2 = 0^- \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$$

$$\blacklozenge \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} x+1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} x-2 = 0^+ \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$$

• Autre exemple : soit $g(x) = \frac{x-5}{x^2-9}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow -3} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$



$$\blacklozenge \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} x-5 = -8 \\ \lim_{x \rightarrow -3^-} x^2-9 = 0^+ \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x-5}{x^2-9} = -\infty$$

$$\blacklozenge \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^+} x-5 = -8 \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} x^2-9 = 0^- \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x-5}{x^2-9} = +\infty$$

$$\blacklozenge \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} x-5 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2-9 = 0^- \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-5}{x^2-9} = +\infty$$

$$\blacklozenge \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^+} x-5 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2-9 = 0^+ \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-5}{x^2-9} = -\infty$$

Exercices :

Donner l'ensemble de définition de f et calculer la limite de f en a :

	$f(x) =$	
1/10	$x^2 - x + 3$	2
2/10	$\frac{5 - 3x}{4x + 1}$	-1
3/10	$\frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 2}$	-1
4/10	$\frac{1}{x}$	0
5/10	$\frac{-2}{x - 3}$	3
6/10	$\frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$	1
7/10	$\frac{x - \frac{1}{2}}{-2x^2 + x + 3}$	-1 3/2
8/10	$\frac{x - 2}{(x + 3)^2}$	-3
9/10	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0
10/10	$\frac{1}{2 - \sqrt{x}}$	4