LOGARITHME NÉPÉRIEN

$\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ (1) : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (2) : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (3) : $\lim\limits_{x\to0} x.\ln x = 0$

Démonstrations :

(1) $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(1+x)-0}{(x+1)-1} = \dfrac{\ln(1+x)-\ln 1}{(x+1)-1} = \dfrac{u(X)-u(1)}{X-1}$ avec $u(X)=\ln(X)$ et $X = x+1$

donc $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)-0}{(x+1)-1} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)-\ln 1}{(x+1)-1} = \lim\limits_{X\to1} \dfrac{\ln X-\ln 1}{X-1} = u'(1) = 1$

(2) $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln\left(\sqrt{x}\right)^2}{x} = \dfrac{2\ln\sqrt{x}}{x} = \dfrac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} \times \dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ En étudiant les variations de $\sqrt{x}-\ln x$ on a :

$\ln x < \sqrt{x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\ln x} > \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \dfrac{x}{\ln x} > \dfrac{x}{\sqrt{x}} \times \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{x\sqrt{x}}{x} = \dfrac{\sqrt{x}}{1} \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} \times \dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$ car $\dfrac{2}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ & $\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

(3) On pose $u = \dfrac{1}{x}$ donc : $x.\ln x = \dfrac{1}{u}\ln\dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{u}(-\ln u) = -\dfrac{\ln u}{u}$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to0} x.\ln x = \lim\limits_{u\to+\infty} -\dfrac{\ln u}{u} = 0$ définition (2)

	f(x)=	$-\infty$	$+\infty$	
1/10	$\dfrac{1}{x}+\ln x$			0^+
2/10	$x.\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$		x	
3/10	$\ln(2x+1)-\ln(x+2)$		x	
4/10	$\dfrac{\ln x}{x}$			0^+
5/10	$\dfrac{x-\ln x}{x}$			0^+
6/10	$x(1-\ln x)$		x	0^+
7/10	$\ln\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)$	x		-1
8/10	$\dfrac{1}{x}(\ln x-1)$		x	e
9/10	$\dfrac{x+1}{\ln x}$		x	1
10/10	$x+\ln(x+1)-\ln x$		x	0^+