Nombres complexes

Forme algébrique d'un nombre complexe

On définit i tel que $i^2 = -1$

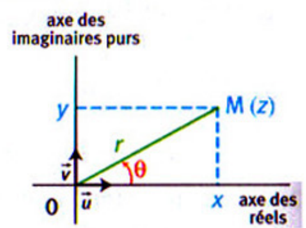
l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est l'ensemble des nombres de la forme $z = x + iy$ avec x et y réels

On dit que $x + iy$ est la **forme algébrique** de z et on note

$\text{Re}(z) = x$ la **partie réelle** de z

et $\text{Im}(z) = y$ la **partie imaginaire** de z

Formes trigonométrique et exponentielle



Soit $z = x + iy$. On considère le point $M(x\,;\,y)$
On dit que z est l'**affixe** de M dans le plan complexe
Le **module** de z est : $|z| = OM = r$
Pour $z \neq 0$, l'**argument** de z est :
$\arg(z) = (\vec{u}, \vec{OM}) = \theta$

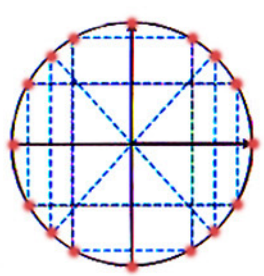
Propriété : $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = \arg(z)$ est tel que : $\cos\theta = \frac{x}{r}$ et $\sin\theta = \frac{y}{r}$

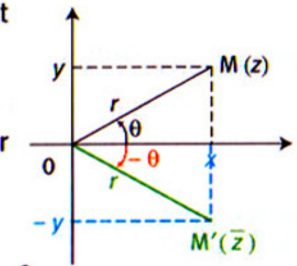
On pose $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

forme	algébrique	trigonométrique	exponentielle
écriture de z	$x + iy$	$r(\cos\theta + i\sin\theta)(z \neq 0)$	$r\,e^{i\theta}\ (z \neq 0)$

Les points remarquables du cercle trigonométrique



Conjugué d'un nombre complexe



Avec les notations précédentes, le **conjugué** de z est le complexe noté $\bar{z}$ défini par :

$$\bar{z} = x - iy = r(\cos\theta - i\sin\theta) = re^{-i\theta}$$

Les points $M(z)$ et $M'(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

Pour z, z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$:

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ $\quad z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$

$\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$ $\quad z + \bar{z} = 2 \times \text{Re}(z)$

$z - \bar{z} = 2i \times \text{Im}(z)$

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (pour $z_2 \neq 0$)

Module et argument d'un produit ou d'un quotient

Pour z_1 et z_2 non nuls :

- $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ et $\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Pour le produit, on multiplie les modules et on ajoute les arguments

- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Pour le quotient, on divise les modules et on soustrait les arguments

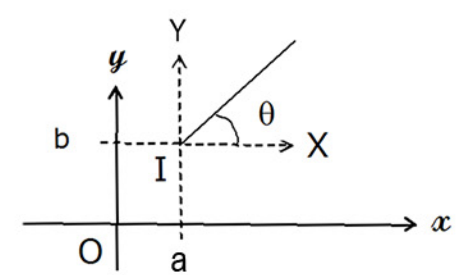
Formules de changement de repère

Pour passer de (O, x, y) à (I, X, Y) :

$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$

Pour passer de (I, X, Y) à (O, x, y) :

$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$



Dans (I, X, Y) :

$\tan\theta = \frac{Y}{X} \quad \Leftrightarrow \quad Y = X \times \tan\theta$

Donc dans (O, x, y) :

$y = (x - a) \times \tan\theta + b$

Ensemble de points

$|z_M - z_A| = R \quad \Leftrightarrow \quad AM = R$

M appartient au cercle C de centre A($x + iy$) et de rayon R

- -

Équation du cercle C (rappel) :

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

$|z_M - z_A| = |z_M - z_B| \quad \Leftrightarrow \quad AM = BM$

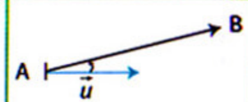
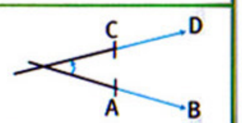
M appartient à la médiatrice du segment [AB]

$Z = X + i \times Y$ est un nombre **réel** si $\quad Z = \overline{Z}$

$Z = X + i \times Y$ est un nombre **imaginaire pur** si $\quad Z = -\overline{Z}$

Vision géométrique : longueurs et angles

Pour A d'affixe z_A et B d'affixe z_B, on a :

affixe d'un vecteur	$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$	
longueur d'un segment	$AB = \lvert z_B - z_A \rvert$	
angle entre $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$	$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$	
angle entre deux vecteurs	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$	

Formules de trigonométrie

Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Formule de Moivre : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
(c'est évident avec la forme exponentielle : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$)

Le second degré

Pour résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$

on calcule d'abord le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

Trois cas se présentent : $\quad$ a, b et c étant réels, avec $a \neq 0$

- **$\Delta > 0$** : deux solutions réelles :

$z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

- **$\Delta = 0$** : une seule solution : $z = -\dfrac{b}{2a}$ (racine double)

- **$\Delta < 0$** : deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Période des puissances de i :

avec k entier relatif

$i^{4k} = 1 \qquad i^{4k+1} = i \qquad i^{4k+2} = -1 \qquad i^{4k+3} = -i$