# ALGÈBRE



Tous les dénominateurs sont non nuls

## RÈGLES DE CALCUL :

- $-a(b-c) = -ab + ac$
- $a - (b - c + d) = a - b + c - d$
- $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

## IDENTITÉS REMARQUABLES :

| | | |
|---|---|---|
| $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ | $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ | $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ |
| $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ | $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ | |

Formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + b^n$$

## FRACTIONS :

- $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{a}{d} \times \frac{c}{b}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
- $k \times \frac{a}{b} = \frac{ka}{b}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right) \Leftrightarrow (ad = bc)$ ($\Leftrightarrow$ équivaut à)

$a \times \frac{b}{c} \neq \frac{ab}{ac}$ et $\frac{a+b}{a+c} \neq \frac{b}{c}$

## PUISSANCES :

- $a^0 = 1 \quad (\text{si } a \neq 0)$
- $a^{n+1} = a^n \times a$
- $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
- $a^1 = a$
- $a^{n+p} = a^n \times a^p$
- $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $(a^n)^p = a^{np}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

## VALEUR ABSOLUE :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

$(|a| = |b|) \Leftrightarrow (a = \pm b)$

$|a+b| \neq |a| + |b|$

## RACINE CARRÉE :

$\sqrt{a^2} = |a|$

a et b désignent des réels positifs

- $(b^2 = a) \Leftrightarrow (b = \sqrt{a})$
- $(\sqrt{a})^2 = a$
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$

Prolongement racine $n^{\text{ième}}$

avec $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$ ($\in$ appartient à)

$(b^n = a) \Leftrightarrow (b = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}})$

$a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$

## Alphabet grec

| Grec | Appellation | Français |
|---|---|---|
| Α, α | *alpha* | a |
| Β, β | *bêta* | b |
| Γ, γ | *gamma* | gu |
| Δ, δ | *delta* | d |
| Ε, ε | *epsilon* | é |
| Ζ, ζ | *dzéta* | dz |
| Η, η | *êta* | ê |
| Θ, θ | *thêta* | th |
| Ι, ι | *iota* | i |
| Κ, κ | *kappa* | k |
| Λ, λ | *lambda* | l |
| Μ, μ | *mu* | m |
| Ν, ν | *nu* | n |
| Ξ, ξ | *ksi* | x |
| Ο, ο | *omicron* | o |
| Π, π | *pi* | p |
| Ρ, ρ | *rô* | r |
| Σ, σ | *sigma* | s |
| Τ, τ | *tau* | t |
| Υ, υ | *upsilon* | u |
| Φ, φ | *phi* | ph |
| Χ, χ | *khi* | kh |
| Ψ, ψ | *psi* | ps |
| Ω, ω | *oméga* | ô |

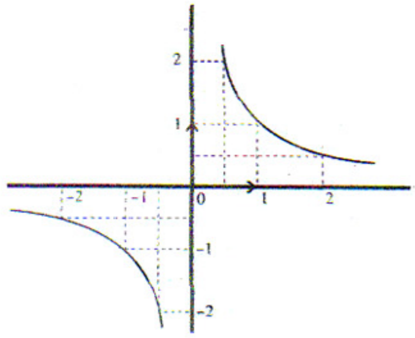
## Ensemble de nombres

| Notation | Ensemble |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | *Entiers Naturels* |
| $\mathbb{Z}$ | *Entiers relatifs* |
| $\mathbb{D}$ | *Nombres décimaux* |
| $\mathbb{Q}$ | *Nombres rationnels* |
| $\mathbb{R}$ | *Nombres réels* |
| $\mathbb{C}$ | *Nombres complexes* |
| $\mathbb{N}^*$ | *Entiers naturels non nuls* |
| $\mathbb{R}^*$ | *Nombres réels non nuls* |
| $\mathbb{Z}_+$ | *Entiers relatifs positifs* |
| $\mathbb{R}_-$ | *Nombres réels négatifs* |
| $\mathbb{R}_+^*$ | *Nombres réels strictement positifs* |

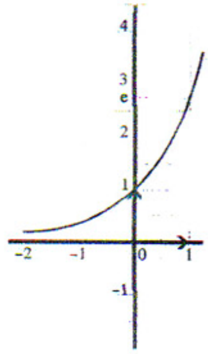
# ANALYSE

## FONCTIONS USUELLES (Suite) :

Fonction inverse : $x \mapsto \frac{1}{x}$




Fonction exponentielle : $x \mapsto e^x$




**Propriétés :**

pour a et b réels

$e^0 = 1$

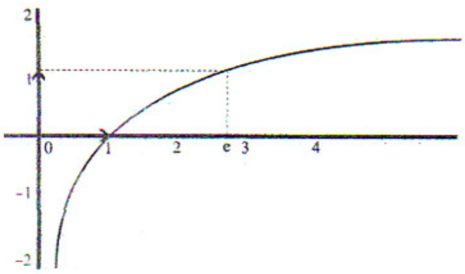
$e^1 = e \approx 2,718$

$e^{a+b} = e^a \times e^b$

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ d'où $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$

$(e^a)^b = e^{ab}$

Fonction logarithme népérien : $x \mapsto \ln x$




- Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$ : $(y = \ln x) \Leftrightarrow (x = e^y)$

$\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$

- Pour $a > 0$, $b > 0$ et $x \in \mathbb{R}$
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln a^x = x \ln a$ et $a^x = e^{x \ln a}$

## DÉRIVÉES ET PRIMITIVES :

### Fonctions usuelles

| Dérivée → / ← primitive | | Intervalle de validité |
|---|---|---|
| $k$ | $0$ | $\mathbb{R}$ |
| $x$ | $1$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}^* - \{1\}$<br>$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$<br>$\mathbb{R}_+^*$ dans les autres cas |
| $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\tan x$ | $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$ |

### Opérations

| Dérivée → / ← primitive | | Remarques |
|---|---|---|
| $ku$ | $ku'$ | $k \in \mathbb{R}$ |
| $u + v$ | $u' + v'$ | |
| $uv$ | $u'v + uv'$ | |
| $\dfrac{1}{u}$ | $-\dfrac{u'}{u^2}$ | si u ne s'annule pas |
| $\dfrac{u}{v}$ | $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ | si v ne s'annule pas |
| $\sqrt{u}$ | $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ | si $u > 0$ |
| $u^\alpha$ $(\alpha \neq 0)$ | $\alpha u' u^{\alpha-1}$ | si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$, u ne doit pas s'annuler<br>si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, il faut $u > 0$ |
| $\ln u$ | $\dfrac{u'}{u}$ | si $u > 0$ |
| $e^u$ | $u'e^u$ | |
| $\sin u$ | $u' \cos u$ | |
| $\cos u$ | $-u' \sin u$ | |
| $v \circ u$ | $u' \times (v' \circ u)$ | |

# ANALYSE

## ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES :

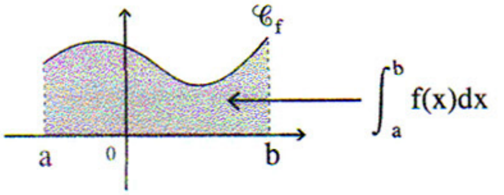
| | | |
|---|---|---|
| Équation | $y' = ay$ | $y' = ay + b$ |
| Solution | $f(x) = ke^{ax}$ | $f(x) = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$ |

## CALCUL INTÉGRAL :

Si F est une primitive de f sur [a,b] :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Interprétation graphique : si $f \geq 0$ sur [a,b]




### Propriétés :

- $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

- Linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$$

- Intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

| Soit $a \leq b$ |
|---|
| si $f \geq 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$ |
| si $f \leq g$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ |

Valeur moyenne de f sur [a,b] : $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

## LIMITES :

a) A l'infini, une fonction polynôme a même limite que son terme de plus haut degré.

b) A l'infini, une fonction rationnelle a même limite que le quotient simplifié de ses termes de plus haut degré.

### • Fonctions usuelles :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ — $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$ — $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \end{cases}$

### • Croissances comparées :

si $\alpha > 0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ — $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0$ — $\lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha \ln x = 0$

### • Taux d'accroissement :

- $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$ — $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$
- $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$ — $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{1 - \cos h}{h} = 0$

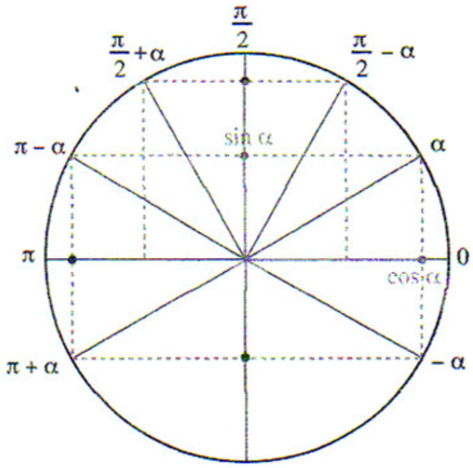
Formes indéterminées

$\infty - \infty$ ; $0 \times \infty$ ; $\dfrac{\infty}{\infty}$ ;

(Notations non admis

# TRIGONOMÉTRIE

## CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE :




Exemples :

$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \sin\alpha$ et $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$

| $\alpha$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos\alpha$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\approx 0{,}87$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\approx 0{,}71$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ |
| $\sin\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ |
| $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | | $0$ |

### Formules d'addition

- $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$
- $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$
- $\sin 2a = 2\sin a\cos a$

### Formule de Moivre

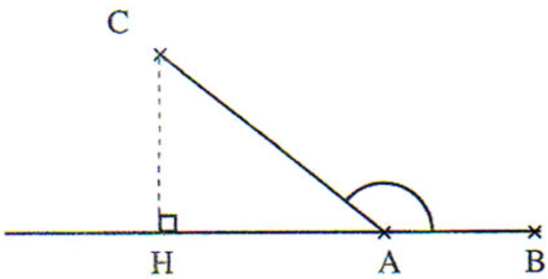
- $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$
- $(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}$

### Formules d'Euler

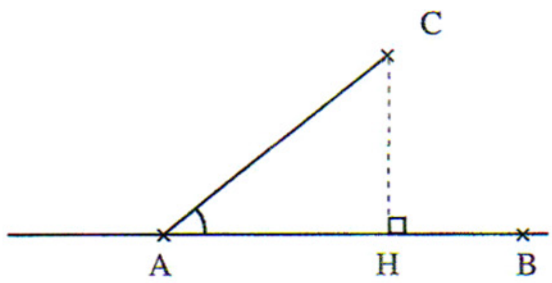
- $\cos\alpha = \dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$
- $\sin\alpha = \dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$

# GÉOMÉTRIE

## PRODUIT SCALAIRE :




$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

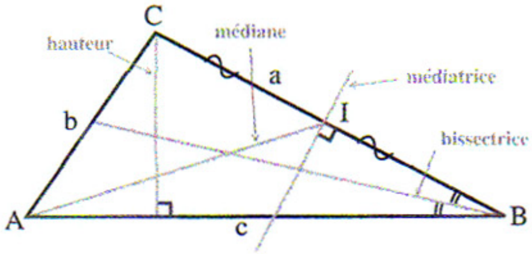



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$$

# GÉOMÉTRIE

## LE TRIANGLE :

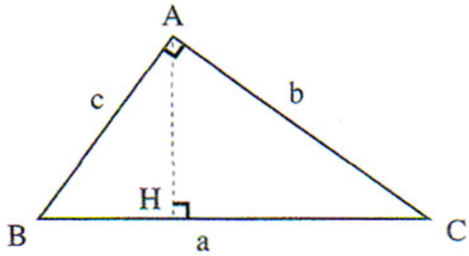



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$ (Formule d'Al-Kashi)

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = \frac{abc}{2S}$$ ← aire du triangle

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$
- $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$
- $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{BC}$

### • Le triangle rectangle

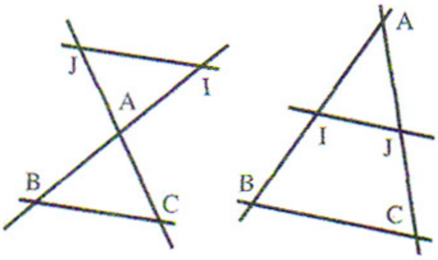



Théorème de Pythagore

$$a^2 = b^2 + c^2$$

- $HA^2 = HB \times HC$
- $\cos\hat{B} = \frac{c}{a}$ → Coté adjacent / → Hypothénuse
- $\sin\hat{B} = \frac{b}{a}$ → Coté opposé / → Hypothénuse

## THÉORÈME DE THALÈS :




• Si A, B, I alignés et A, C, J alignés

et (IJ) parallèle à (BC)

alors $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC}$

Réciproque

• Si A, B, I et A, C, J sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC}$

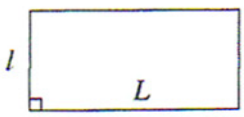
Alors (IJ) est parallèle à (BC)

## AIRES :

**Carré**

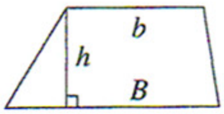

$\mathcal{A} = a^2$

**Rectangle**



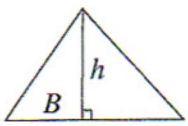

$\mathcal{A} = L \times l$

**Trapèze**



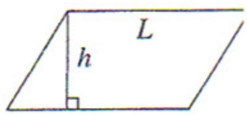

$\mathcal{A} = \frac{(B + b) \times h}{2}$

**Triangle**




$\mathcal{A} = \frac{B \times h}{2}$

**Parallélogramme**

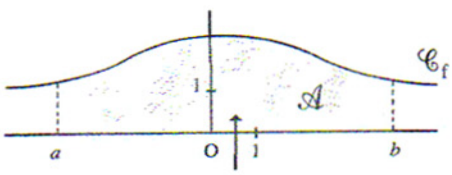



$\mathcal{A} = L \times h$

**Disque**


$\mathcal{A} = \pi \times r^2$

**Aire sous une courbe**



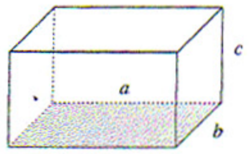

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(t)\,dt$$

(exprimée en unité d'aire)

# GÉOMÉTRIE

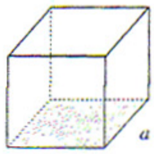
## VOLUMES :

**Parallélépipède rectangle**



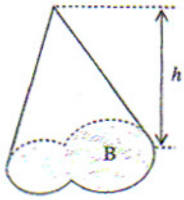

$V = a \times b \times c$

**Cube**

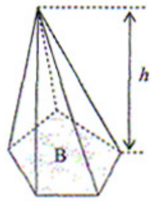



$V = a^3$

**Cône**

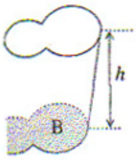



**Pyramide**

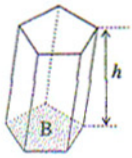



$V = \frac{1}{3} B \times h$

**Cylindre**

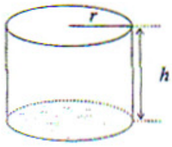



**Prisme**



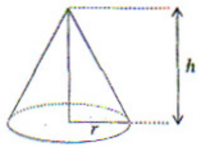

$V = B \times h$

**Cylindre de révolution**



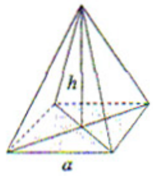

$V = \pi r^2 h$

**Cône droit**




$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$

**Pyramide à base carrée**

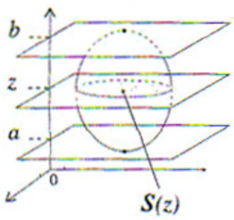



$V = \frac{1}{3} a^2 \times h$

**Sphère**


$V = \frac{4\pi \times r^3}{3}$

**Solide**




$V = \int_a^b S(z)\mathrm{d}z$

## ANGLES

**Angles alternes internes** — **Angle au centre** — **Angles inscrits**

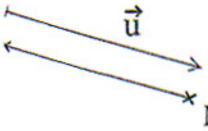

**BARYCENTRE :** G est le barycentre de $(A_1, \alpha_1)$; $(A_2, \alpha_2)$; ..........$(A_n, \alpha_n)$, avec $\alpha_1 + \alpha_2 + .... + \alpha_n \neq 0$

et seulement si $\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + ....... + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$. Pour tout point M; $\overrightarrow{MG} = \dfrac{\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + ....... + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + .... + \alpha_n}$

## TRANSFORMATIONS :

(pour tout point M d'image M')

**Translation $t_{\vec{u}}$**



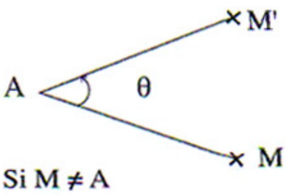

$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

**Homothétie h (A, k)**

≠ 0

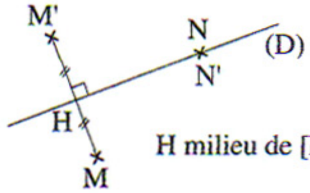

$\overrightarrow{AM'} = k\,\overrightarrow{AM}$

**Rotation r (A, θ)**




Si $M \neq A$
$$\begin{cases} AM' = AM \\ (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \theta \quad [2\pi] \end{cases}$$

**Réflexion $s_D$**




H milieu de [MM']

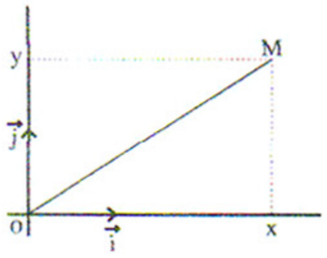
si $M \notin D$ alors $\begin{cases} (MM') \perp D \\ H \in D \end{cases}$

si $M \in D$ alors $M' = M$

# GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Les repères sont orthonormés

## PLAN




$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Soit $A(x_A; y_A)$; $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$(\vec{u} \perp \vec{v}) \Leftrightarrow (xx' + yy' = 0)$

$(\vec{u}$ colinéaire à $\vec{v}) \Leftrightarrow (xy' - x'y = 0)$

### • Cercle de centre A et de rayon R

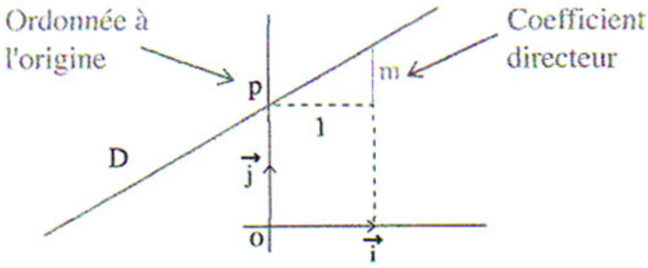
$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$

### • Droite

Une droite D admettant pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ non nul a une équation cartésienne du type $ax + by + c = 0$ et réciproquement

Remarque : $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.

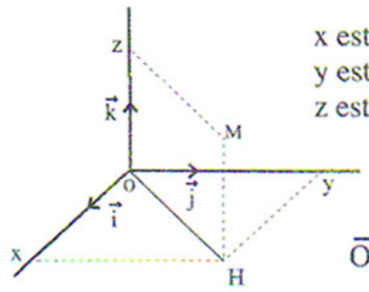
Toute droite D du plan admet pour équation réduite :
$y = mx + p$ si D non parallèle à $(O, \vec{j})$
$x = k$ si D parallèle à $(O, \vec{j})$




Si A et B sont deux points distincts de D
et si $\neq x_B$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

## ESPACE




x est l'abscisse de M
y est l'ordonnée de M
z est la cote de M

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$; $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$(\vec{u} \perp \vec{v}) \Leftrightarrow (xx' + yy' + zz' = 0)$

### • Sphère de centre A et de rayon R

$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = R^2$

### • Plan

Tout plan P admettant pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ non nul a une équation cartésienne du type : $ax + by + cz + d = 0$ et réciproquement.

### • Équations paramétriques de la droite D $(A, \vec{u})$

$$\begin{cases} x = x_A + k\alpha \\ y = y_A + k\beta \\ z = z_A + k\gamma \end{cases} \quad \text{où } \vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ et } k \in \mathbb{R}$$

### • Équations paramétriques du plan P $(A, \vec{u}, \vec{v})$

$$\begin{cases} x = x_A + k\alpha + k'\alpha' \\ y = y_A + k\beta + k'\beta' \\ z = z_A + k\gamma + k'\gamma' \end{cases} \quad \text{où } \vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \; \vec{v}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} \text{ et } \begin{matrix} k \in \mathbb{R} \\ k' \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

# GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

| PLAN | ESPACE |
|---|---|
| Soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ | Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ |

I milieu de [AB]

| | |
|---|---|
| $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$ | $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}, \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$ |

G barycentre de $(A, \alpha)$ et $(B, \beta)$
$(\alpha + \beta \neq 0)$

| | |
|---|---|
| $G\left(\dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}, \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}\right)$ | $G\left(\dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}, \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}, \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}\right)$ |

Distance AB

| | |
|---|---|
| $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ | $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ |
| stance du point A à une droite D : | Distance du point A à un plan P : |
| Si D a pour équation : | Si P a pour équation : |
| $ax + by + c = 0$ | $ax + by + cz + d = 0$ |
| $(A, D) = \dfrac{\lvert ax_A + by_A + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ | $d(A, P) = \dfrac{\lvert ax_A + by_A + cz_A + d \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ |

Vecteur $\overrightarrow{AB}$

| | |
|---|---|
| $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ | $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ |

# STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

## STATISTIQUES :

### • Paramètres

Moyenne : $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

Variance :

$$V(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right) - (\overline{x})^2$$

Écart - type : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$

### • Méthode des moindres carrés

Covariance :

$$Cov(x,y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \overline{x}\overline{y}$$

Équation de la droite d'ajustement : $y = ax + b$

avec $a = \dfrac{Cov(x,y)}{V(x)}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$

la droite passe par le point moyen $G(\overline{x}; \overline{y})$

## DÉNOMBREMENTS :

E est un ensemble à n éléments $(n \geq 1)$

Le nombre de permutations des n éléments de E est :

$n! = n(n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots \times 2 \times 1$

Le nombre de listes de p éléments de E $(p \geq 1)$ est : $n^p$

Le nombre de listes de p éléments distincts deux à deux $(1 \leq p \leq n)$ est :

$$n(n-1) \;\ldots\ldots\; (n-(p-1)) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

(Par convention $0! = 1$)

Le nombre de combinaisons de p éléments de E $(0 \leq p \leq n)$ est :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-(p-1))}^{\text{p facteurs}}}{\underbrace{p \times (p-1) \times \ldots \times 1}_{\text{p facteurs}}}$$

Propriété : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

**Triangle de Pascal**

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

s'écrit

$$1$$

$$1 \quad 1$$

$$1 \quad 2 \quad 1$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

**Remarque :** on retrouve les coefficients du binôme de Newton.

Exemple : $(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

# STATISTIQUES ET PROBABILITÉS



## PROBABILITÉS

A et B désignent deux événements d'un univers fini $\Omega$

$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$$

card A ← nombre d'éléments de A

card $\Omega$ ← nombre d'éléments de $\Omega$

$p(\varnothing) = 0$ $\quad$ $p(\Omega) = 1$

$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ ← événement contraire de A

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

### Formule des probabilités totales :

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une partition de $\Omega$

Alors $p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \ldots + p(B \cap A_n)$

en particulier: $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A})$

### • Probabilités Conditionnelles :

$$\underbrace{P_A(B)}_{\text{aussi noté } p(B/A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad (\text{si } p(A) \neq 0)$$

A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

### • Variable aléatoire :

Loi de probabilité de X

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | .... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_i = p(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | .... | $p_n$ |

avec $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

- Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$
- Variance :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2$$

- Écart - type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

### Lois de probabilités usuelles

- Loi de Bernoulli de paramètre p :
  X ne prend que deux valeurs codées 1 et 0 de probabilités respectives p et $1 - p$
  et : $E(X) = p$ ; $V(X) = p(1 - p)$.

- Loi exponentielle de paramètre $\lambda$ ($\lambda > 0$) :
  (ou loi de durée de vie sans vieillissement de paramètre $\lambda$)
  Si $0 \leq a \leq b$, $p(a \leq T \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$
  Pour $t \geq 0$, $p(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$
  et $E(T) = \sigma(T) = \frac{1}{\lambda}$

- Loi binominale $B(n, p)$ de paramètres n et p :
  pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$
  On a : $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$
  et : $E(X) = np$ ; $V(X) = np(1 - p)$

- Loi uniforme sur [a,b] :
  Soit un intervalle $J = [c,d]$ inclus dans [a,b]
  $p(J) = p(c \leq X \leq d) = \frac{d - c}{b - a}$
  $d - c$ ← longueur de [c,d]
  $b - a$ ← longueur de [a,b]
  En particulier :
  Si $[a,b] = [0,1]$ alors $p(c \leq X \leq d) = d - c$